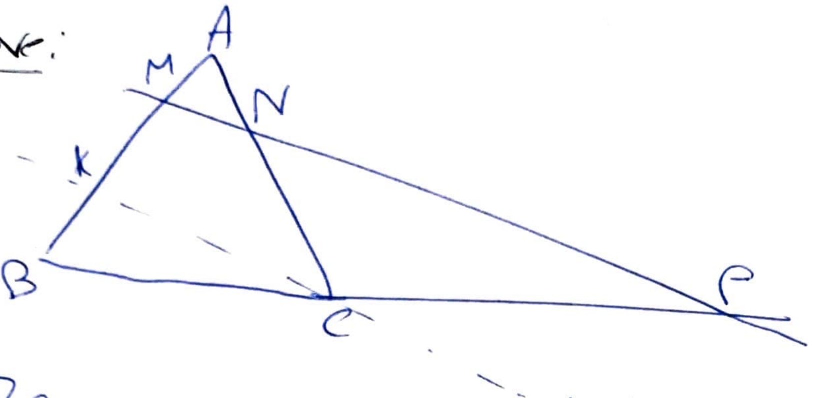
Ménélaüs et Céva | Leçon : 181

Thm : Soit ABC un triangle non aplati et M, N, P 3 points appartenant respectivement aux droites (AB), (AC), (BC) et distincts des sommets du triangle.

- **Ménélaüs :** M, N, P alignés $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$
- **Céva :** $(CM), (AP), (BN)$ sont concourantes ou parallèles $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$

Preuve :

▸



$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que M, N, P sont alignés.

On note K le point d'intersection de la parallèle à (MP) passant par C coupant (AB).

Par le théorème de Thalès on a $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MK}}$ et $\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \dfrac{\overline{MK}}{\overline{MA}}$

On a $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{NA}} = \dfrac{\overline{AK}}{\overline{MA}}$ et $\overline{AC} = \overline{AN} + \overline{NC}$, $\overline{AK} = \overline{AM} + \overline{MK}$

On a donc directement $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MK}} \times \dfrac{\overline{MK}}{\overline{MA}} = 1$

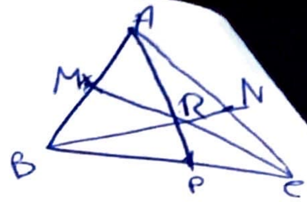
$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ on note P' l'intersection des droites (MN) et (BC).

Le point P' existe sinon les droites (MN) et (BC) seraient parallèles et donc par Thalès on aurait $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$ et par hypothèse on aurait $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = 1 \Rightarrow B = C$ absurde.

On a donc $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ et $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$

D'où $\dfrac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \Rightarrow P = P'$ d'où le théorème.

▶ $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que les 3 droites concourent en un point R



Notons (α,β,γ) les données barycentriques de R dans le repère affine. On peut supposer $\alpha+\beta+\gamma=1$.

- On a $\alpha,\beta,\gamma \neq 0$ sinon R serait sur l'un des côtés et l'un des points M, N, P serait confondu avec le sommet.
- On a la somme de 2 coefs α,β,γ jamais nulle sinon si par exemple $\alpha+\beta=0$ on aurait $\overrightarrow{CR} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} = \alpha\overrightarrow{BA}$ et (CR) serait parallèle à (BA)

L'associativité du barycentre montre que R est barycentre de $A(\alpha), g(\beta+\gamma)$ où g est barycentre de $B(\beta), C(\gamma)$. $\Rightarrow$ On a $R = \alpha A + \beta B + \gamma C$ et $g = \frac{1}{\beta+\gamma}(\beta B + \gamma C)$ $\Rightarrow R = \alpha A + (\beta+\gamma) g$

alignés car barycentre d'un segment est au milieu du segment

Comme les points g, B, C d'une part et $\underset{\text{idem}}{g, A, R}$ d'autre part, sont alignés.

On a que $g = P$ et $\beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ d'où $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{\gamma}{\beta}$

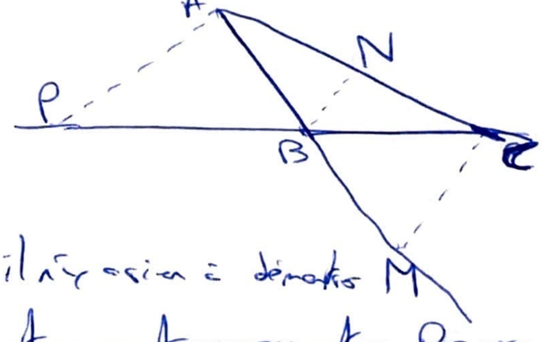
car les droites (AR), (BC) s'intersectent en un unique point

↳ De la même manière on a $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -\frac{\alpha}{\gamma}$

C'est tout ce processus qu'on réitère

On a donc bien $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$

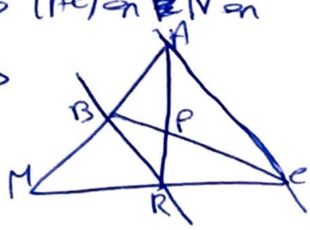
• On suppose que les 3 droites sont parallèles dans ce cas par théorème de Thalès on a $\xi = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}} \times \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$



$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$

Si les droites $(CM), (AP), (BN)$ sont parallèles il n'y a rien à démontrer

Sinon ~~elles sont concourantes~~ si deux des 3 droites sont concourantes. Par exemple prenons $(CM), (AP)$ qui se coupent en R. Alors (BR) coupe (AC) en N' en effet si c'était pas le cas on aurait $(BR) // (AC)$ d'où on aurait ⟶



et donc par Thalès on aurait $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BR}} = -\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$

D'où par hypothèse on aurait $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1 \Rightarrow C = A$ absurde

D'où $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{N'C}}{\overline{N'A}} = -1$ et $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{N'C}}{\overline{N'A}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \Rightarrow N = N'$ d'où le résultat □

COMPLEMENTS

- <u>Thm de Thalès</u> : Si deux droites D, D' et A, B, C (resp A', B', C') 3 points distincts de D (resp D') avec $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$

les droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ il existe un scalaire λ tq $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{A'C'}$, la projection sur D parallèlement à (AA') est affine de partie linéaire une projection vectorielle π

D'où $\pi(\overrightarrow{A'B'}) = \lambda \pi(\overrightarrow{A'C'}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ D'où $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit C'' l'intersection de la droite (AB) et de la parallèle à (AA') passant par C.

le théorème de Thalès donne $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$ or $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ par hyp

D'où $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} \Rightarrow C' = C''$ d'où le résultat. □